

Mathe-Prüfungstraining – Übungsaufgaben

1. Thema: Bruchrechnung und Auflösen von Gleichungen

1. Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $-(-x^2 + (-\sqrt{2}x)^2 - (-2) \cdot y^2 - (-2y)^2 - (x - y)^2) =$

b) $\frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{9}} =$

c) $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} =$

d) $\frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} =$

e) $\frac{\sqrt[3]{\frac{x}{y}}}{\frac{1}{x^3} \cdot y^{-\frac{1}{3}}} =$

2. Bringe auf einen Bruchstrich.

a) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{x} =$

b) $5x + 1 + \frac{1}{5x-2} =$

3. Löse die folgende Gleichung nach der jeweils angegebenen Variable auf: $\frac{a}{b} = \frac{c+e}{d+f}$

a) $a =$

b) $b =$

c) $c =$

d) $d =$

4. Die folgenden Terme sind jeweils äquivalent zu einem der mit A-F bezeichneten Terme. Ordne sie korrekt zu.

A: $(a + b)^2$ B: $-(a + b)^2$ C: $(a - b)^2$ D: $-(a - b)^2$ E: $(a + b)(a - b)$ F: $-(a + b)(a - b)$

_____ $(b + a)^2$ _____ $(b - a)^2$ _____ $(-a - b)^2$ _____ $(a + b)(b - a)$

_____ $(-a - b)(a + b)$ _____ $(a - b)(b - a)$ _____ $[-(a + b)]^2$ _____ $(-a + b)^2$

_____ $-(b - a)(a - b)$ _____ $(b + a)(b - a)$ _____ $[-(a + b)][-(b - a)]$ _____ $(a - b)(b + a)$

_____ $[-(a + b)][-(-b - a)]$ _____ $-(-b + a)^2$ _____ $-b^2(\frac{a}{b} + 1)(1 - \frac{a}{b})$ _____ $[-(b - a)]^2$

_____ $-(-b - a)(-b - (-a))$ _____ $a^2(1 + \frac{b}{a})^2$ _____ $\frac{a+b}{a}(-a^2 - ab)$ _____ $ab(1 + \frac{a}{b})(1 + \frac{b}{a})$

_____ $(\frac{a^2}{b} - a)(\frac{b^2}{a} - b)$ _____ $\frac{a^4 - b^4}{a^2 + b^2}$ _____ $\frac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{(-a-b)^{-1}}{b-a}}$ _____ $\ln \frac{e^{a^2} \cdot e^{b^2}}{e^{2b^2}}$

_____ $\frac{1}{4} [\ln(e^a)^2 - 4 \ln \sqrt{e^b}]^2$ _____ $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} \cdot \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$ für $a > b$ _____ siehe links, $b > a$

5. Führe die angegebene Operation auf beiden Seiten der Gleichung aus.

a) $\frac{E}{v^2} = \frac{1}{2}m \quad | : E$

b) $\frac{E}{v^2} = \frac{1}{2}m \quad | : \frac{E}{v^2}$

c) $\frac{E}{v^2} = \frac{1}{2}m \quad | \cdot \frac{2}{m}$

d) $\frac{E}{v^2} = \frac{1}{2}m \quad | \cdot \frac{1}{2}v^2$

6. Gib die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an.

a) $5x = 8x$
L = _____

b) $x^2 = \sqrt{3}$
L = _____

c) $x = \frac{9}{x}$
L = _____

d) $2x^2 - 2 = 2x^2 + 2$
L = _____

e) $3x = 2\sqrt{3x - 1}$
L = _____

f) $5x^2 - 8 = 3x - 6$
L = _____

g) $3^{5x} = \frac{1}{9}$
L = _____

h) $\frac{1}{2x} - \frac{x-2}{x^2+2x} = \frac{3}{4+2x}$
L = _____

i) $\frac{2}{3x-5} = \frac{3}{2x}$
L = _____

k) $\frac{3}{2x} + \frac{2}{x-2} = \frac{3-x}{2x^2-4x}$
L = _____

l) $2e^{3x} = 16$
L = _____

m) $x^4 - 3x^3 = 10x^2$
L = _____

7. Für welche x nehmen die folgenden Funktionen den Wert 1 an?

a) $f(x) = e^{x-5}$

b) $g(x) = \frac{3}{2}x^{-0,25}$

c) $h(x) = \ln x$

d) $p(x) = \frac{1}{3x^3}$

8. Zu welchem der folgenden Ausdrücke ist $\sqrt{\sqrt{x}}$ äquivalent? \sqrt{x} $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[6]{x}$ $\sqrt[8]{x}$ $\sqrt[9]{x}$ $\sqrt[16]{x}$ $\sqrt[27]{x}$

Mathe-Prüfungstraining – Lösungen

1. Thema: Bruchrechnung und Auflösen von Gleichungen

1. a)
$$\begin{aligned} & -(-x^2 + (-\sqrt{2}x)^2 - (-2) \cdot y^2 - (-2y)^2 - (x - y)^2) = \\ & -(-x^2 + 2x^2 + 2y^2 - 4y^2 - (x^2 - 2xy + y^2)) = \\ & -(x^2 - 2y^2 - x^2 + 2xy - y^2) = \\ & -(-3y^2 + 2xy) = 3y^2 - 2xy \end{aligned}$$

b)
$$\frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{9}} = \frac{\frac{5}{6} - \frac{3}{6}}{\frac{3}{9} + \frac{2}{9}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{9}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{3}{5}$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} &= \frac{\frac{x_0}{x \cdot x_0} - \frac{x}{x_0 \cdot x}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} = \frac{x_0 - x}{xx_0} \cdot \frac{1}{x - x_0} \\ &= \frac{-(x - x_0)}{xx_0(x - x_0)} = -\frac{1}{xx_0} \end{aligned}$$

d)
$$\frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \frac{(x^2 + x_0x + x_0^2)(x - x_0)}{x - x_0} = x^2 + x_0x + x_0^2$$
 Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (x^3 + 0x^2 + 0x - x_0^3) : (x - x_0) = x^2 + x_0x + x_0^2 \\ \underline{-(x^3 - x_0x^2)} \\ x_0x^2 + 0x \\ \underline{-(x_0x^2 - x_0^2x)} \\ x_0^2x - x_0^3 \\ \underline{-(x_0^2x - x_0^3)} \\ 0 \end{array}$$

e)
$$\frac{\sqrt[3]{\frac{x}{y}}}{\frac{1}{x^3} \cdot y^{-\frac{1}{3}}} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{y^{\frac{1}{3}}}} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}} = 1$$

2. a)
$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{x} = \frac{x^2}{2} - \frac{2x}{1} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 \cdot x}{2 \cdot x} - \frac{2x \cdot 2x}{1 \cdot 2x} + \frac{1 \cdot 2}{x \cdot 2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 2}{2x}$$

b)
$$5x + 1 + \frac{1}{5x-2} = \frac{5x \cdot (5x-2)}{5x-2} + \frac{5x-2}{5x-2} + \frac{1}{5x-2} = \frac{25x^2 - 10x + 5x - 2 + 1}{5x-2} = \frac{25x^2 - 5x - 1}{5x-2}$$

3. a)
$$\frac{a}{b} = \frac{c+e}{d+f} \quad | \cdot b \quad \Leftrightarrow \quad a = b \cdot \frac{c+e}{d+f}$$

b) Kehrbuch
$$\frac{b}{a} = \frac{d+f}{c+e} \quad | \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad b = a \cdot \frac{d+f}{c+e}$$

c)
$$\frac{a}{b} = \frac{c+e}{d+f} \quad | \cdot (d+f) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b}(d+f) = c+e \quad | -e \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{a}{b}(d+f) - e$$

d) Kehrbuch
$$\frac{b}{a} = \frac{d+f}{c+e} \quad | \cdot (c+e) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a}(c+e) = d+f \quad | -f \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{b}{a}(c+e) - f$$

4. A:
$$(a+b)^2 = (b+a)^2 = (-a-b)^2 = [-(a+b)]^2 = a^2\left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 = ab\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{a}\right) = \frac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{(-a-b)^{-1}}{b-a}}$$

B:
$$-(a+b)^2 = (-a-b)(a+b) = [-(a+b)][-(-b-a)] = \frac{a+b}{a}(-a^2 - ab)$$

C:
$$(a-b)^2 = (b-a)^2 = (-a+b)^2 = -(b-a)(a-b) = [-(b-a)]^2 = \frac{1}{4} [\ln(e^a)^2 - 4 \ln \sqrt{e^b}]^2$$

D:
$$-(a-b)^2 = (a-b)(b-a) = -(-b+a)^2 = \left(\frac{a^2}{b} - a\right)\left(\frac{b^2}{a} - b\right)$$

E:
$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= (a-b)(b+a) = -b^2\left(\frac{a}{b} + 1\right)\left(1 - \frac{a}{b}\right) = -(-b-a)(-b-(-a)) = \frac{a^4 - b^4}{a^2 + b^2} = \ln \frac{e^{a^2} \cdot e^{b^2}}{e^{2b^2}} \\ &= \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} \cdot \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} \quad \text{für } a > b \end{aligned}$$

F:
$$\begin{aligned} -(a+b)(a-b) &= (a+b)(b-a) = (b+a)(b-a) = [-(a+b)][-(b-a)] \\ &= \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} \cdot \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} \quad \text{für } b > a \end{aligned}$$

5. a)
$$\begin{aligned} \frac{E}{v^2} &= \frac{1}{2}m \quad | : E \\ \frac{1}{v^2} &= \frac{m}{2E} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \frac{E}{v^2} &= \frac{1}{2}m \quad | : \frac{E}{v^2} \\ 1 &= \frac{mv^2}{2E} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{E}{v^2} &= \frac{1}{2}m \quad | \cdot \frac{2}{m} \\ \frac{2E}{mv^2} &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \frac{E}{v^2} &= \frac{1}{2}m \quad | \cdot \frac{1}{2}v^2 \\ \frac{E}{2} &= \frac{1}{4}mv^2 \end{aligned}$$

6. a) $5x = 8x \quad | -5x$
 $0 = 3x$
 $L = \{0\}$
- b) $x^2 = \sqrt{3} \quad | \sqrt{\quad}$
 $x = \pm \sqrt[4]{3}$
 $L = \{-\sqrt[4]{3}; +\sqrt[4]{3}\}$
- c) $x = \frac{9}{x} \quad | \cdot x$
 $x^2 = 9$
 $L = \{+3; -3\}$
- d) $2x^2 - 2 = 2x^2 + 2 \quad | -2x^2$
 $-2 = +2 \quad (\text{f für alle } x)$
 $L = \{\}$
- e) $3x = 2\sqrt{3x-1} \quad | ^2$
 $9x^2 = 4 \cdot (3x-1)$
 $9x^2 - 12x + 4 = 0$
 $(3x+2)(3x-2) = 0$
 $L = \{-\frac{2}{3}; +\frac{2}{3}\}$
- f) $5x^2 - 8 = 3x - 6$
 $5x^2 - 3x - 2 = 0$
 $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{10}$
 $= \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -0,4 \end{array} \right.$
 $L = \{-0,4; +1\}$
- g) $3^{5x} = \frac{1}{9} \quad | \log_3()$
 $5x = \log_3 \frac{1}{9}$
 $5x = \log_3(3^{-2}) = -2$
 $x = -\frac{2}{5}$
 $L = \{-\frac{2}{5}\}$
- h) $\frac{1}{2x} - \frac{x-2}{x^2+2x} = \frac{3}{4+2x}$
 $\frac{x+2}{2x(x+2)} - \frac{2(x-2)}{2x(x+2)} = \frac{3x}{2x(2+x)}$
 $x+2 - 2(x-2) = 3x$
 $6 = 4x$
 $L = \{\frac{3}{2}\}$
- i) $\frac{2}{3x-5} = \frac{3}{2x} \quad | \text{Kehrwert}$
 $\frac{3x-5}{2} = \frac{2x}{3} \quad | \cdot 6$
 $9x - 45 = 4x \quad | -4x + 45$
 $5x = 45$
 $L = \{9\}$
- k) $\frac{3}{2x} + \frac{2}{x-2} = \frac{3-x}{2x^2-4x}$
 $\frac{3(x-2)}{2x(x-2)} + \frac{2 \cdot 2x}{2x(x-2)} = \frac{3-x}{2x(x-2)}$
 $3(x-2) + 4x = 3-x$
 $8x = 9$
 $L = \{\frac{9}{8}\}$
- l) $2e^{3x} = 16 \quad | :2$
 $e^{3x} = 8 = 2^3 \quad | \ln()$
 $3x = \ln 2^3 = 3 \ln 2$
 $x = 2$
 $L = \{2\}$
- m) $x^4 - 3x^3 = 10x^2$
 $x^2(x^2 - 3x - 10) = 0$
 $x^2(x-5)(x+2) = 0$
(NS z.B. aus MNF)
 $L = \{0; -2; 5\}$
7. a) $e^{x-5} = 1 \Leftrightarrow x-5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$
- b) $\frac{3}{2}x^{-0,25} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} = x^{0,25} = x^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$
- c) $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$
- d) $\frac{1}{3x^3} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = x^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

8. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = \left(\left((x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{x}$

Weitere Übungsaufgaben im Netz

1. Thema: Bruchrechnung und Auflösen von Gleichungen

Übungsaufgaben auf www.raschweb.de:

- Mathe 8: Rechnen mit Bruchtermen, **Bruchgleichungen 1 & 2**
- Mathe 9: Aufgabenblatt Binomische Formeln, Intensivierung: Binomische Formeln, Aufgaben zu Gleichungen
- Mathe 10: Exponentialgleichungen, **Wiederholung: Gleichungen (7. bis 9. Klasse)**, Polynomdivision

Übungsaufgaben auf www.mathegym.de:

- Lineare Gleichungen – Schwerpunkt Brüche (07. Klasse)
- **Bruchgleichungen (08. Klasse)**, Bruchterme berechnen (08. Klasse)
- Binomische Formeln (09. Klasse), Quadratische Gleichungen (09. Klasse)
- Logarithmen/Exponentialgleichungen (10. Klasse)